Para obtener la puntuación máxima se deberán resolver correctamente todos los apartados contenidos en tres problemas elegidos de los seis propuestos. Se deberán numerar las páginas antes de realizar la entrega y, en caso de haber resuelto más de tres problemas, se corregirán únicamente los tres primeros.

## Problema 1

(a) Se tienen $n+1$ cajas idénticas con $n$ bolas cada caja. En la primera caja hay $n$ bolas negras; en la segunda caja hay $n-1$ bolas negras y 1 bola blanca; en la tercera hay $n-2$ bolas negras y 2 bolas blancas y así sucesivamente, hasta que, en la última caja, hay $n$ bolas blancas. Se toma una caja al azar y de ella se extraen tres bolas de una vez:

(a-1) [***4 puntos***] Calcule la probabilidad de que las tres bolas sean blancas.

(a-2) [***3 puntos***] Suponiendo que, tras la extracción, las tres bolas son blancas, calcule el número de cajas que tiene que haber para que la probabilidad de que provengan las tres bolas blancas de las dos últimas cajas, sea igual a $\frac{2}{3}$.

(b) [***3 puntos***] Dos varillas, $AB$, $BC$, de igual longitud y articuladas en $B$, tienen fijo el extremo $A$. Si el extremo $C$ se mueve sobre la recta $AC$, halle la ecuación del lugar geométrico de un punto $P$, tomado en $BC$.

## Problema 2

(a) En un establecimento comercial, la salida diaria de cierto tipo de electrodoméstico viene descrita por una variable aleatoria $X$ con soporte $D_X = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n\}$. Se sabe que un $100a\,\%$ de los días, $a \in [0,1]$, no se vende ningún aparato, mientras que la probabilidad de vender un número fijo de ellos, es directamente proporcional a ese número.

(a-1) [***1 punto***] Demuestre que se verifica $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(a-2) [***2,5 puntos***] Calcule la ley de probabilidad asociada al fenómeno aleatorio descrito: función de masa de probabilidad y función de distribución.

(a-3) [***1,5 puntos***] Si el vendedor observa que, por término medio, cada mes (30 días) vende 1485 aparatos y el $90\,\%$ de los días tiene alguna venta, ¿cuántos electrodomésticos puede vender, como máximo, cada día? ¿Cuál es esa probabilidad?

(b) [***5 puntos***] Halle el volumen del sólido generado al girar, alrededor del eje $OX$, la región del plano que resulta de la intersección del interior de $x^2 + y^2 = 17$ con el exterior de $x^2 + y^2 = 17x$.

## Problema 3

(a) [***4 puntos***] Calcule el límite de la sucesión definida por: $a_n = \dfrac{1 + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!}{(n+1)!}$

(b) [***6 puntos***] Encuentre los valores de $x$ para los cuales la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(x+1)^n}{3^n\,n^2}$, es convergente.

## Problema 4

Para cada $n \in \mathbb{N}$ no nulo y para cada $a, b \in \mathbb{C}$ considere la matriz

$$A_n(a) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 1+a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1+a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1+a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$$

y el sistema de ecuaciones $A_n(a)X = (0, 0, \ldots, b)^t$ con $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$.

(a) [***1 punto***] Calcule los siguientes determinantes: $\det(A_1(a))$, $\det(A_2(a))$, $\det(A_3(a))$.

(b) [***1 punto***] Obtenga una relación lineal entre los determinantes de $A_n(a)$ , $A_{n+1}(a)$ y $A_{n+2}(a)$.

(c) [***3 puntos***] Halle, según los valores de $a$ y $n$, una expresión para el determinante de $A_n(a)$.

(d) [***5 puntos***] Estudie el sistema $A_n(a) \cdot X = (0, 0, \ldots, b)^t$ según los valores de $a$, $n$, $b$.

## Problema 5

(a) [***4 puntos***] Un grupo de alumnos de 1º de la ESO va a visitar las instalaciones deportivas de un equipo de baloncesto. Para dinamizar la visita, el club ha preparado una actividad para el alumnado. Sobre la cancha han colocado cierto número de pelotas de baloncesto. Si cada pelota dispuesta la toma un alumno distinto, quedarán $n$ alumnos sin haber cogido ninguna pelota. Sin embargo, si se montan equipos de $n$ alumnos alrededor de cada pelota dispuesta, quedarán libres $n$ pelotas. ¿Cuántas pelotas ha dispuesto el equipo de baloncesto para organizar la actividad?

(b) Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

(b.1) [***4,5 puntos***] Represéntela

(b.2) [***1,5 puntos***] Calcule, según el valor de $a \in \mathbb{R}$, el número de soluciones de la ecuación

$$x - a \ln x = 0$$

.

## Problema 6

[***10 puntos***] En un triángulo $\triangle ABC$, la bisectriz interior del ángulo $\angle BAC$, corta al lado $BC$ en el punto $D$. Sea la circunferencia $\Gamma$, que pasa por el punto $A$ y es tangente a $BC$ en el punto $D$. Si $M$ es el otro punto de intersección de $\Gamma$ con el lado $AC$ y la recta $BM$ corta a la circunferencia $\Gamma$ en el punto $P$, demuestre que $AP$ es una mediana del triángulo $\triangle ABD$.